Title	Conjugacy Invariants and Normal Forms of Isometries of Hyperbolic Space
Author(s)	和田, 昌昭
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 624: 207-223
Issue Date	1987-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/99922
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
624巻 1987年 207-223

Conjugacy Invariants and Normal Forms of Isometries of Hyperbolic Space

阪大 理　和田 昌昭 (Masaaki Wada)

Introduction.

3次元双曲空間の正の等長写像のつくる群は $PSL_2(\mathbb{C})$ と同型になることはよく知られている。すなわち、$\mathbb{H}$ を4元数体とするとき

$$H^3 = \{ z = z_0 + z_1 i + z_2 j \in \mathbb{H} \mid z_2 > 0 \}$$

は、Riemann 計量を

$$ds = \frac{|dz|}{z_2}$$

によって定義することにより双曲空間になる。$PSL_2(\mathbb{C})$ はその上に Möbius 変換として働く、すなわち

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

$$z \in H^3$$

に対して

$$g \cdot z = (az + b)(cz + d)^{-1}.$$

これを高次元へ拡張するには、クリフォード多元環の元を成分にもつ 2×2 行列を考えるのが便利であり、実際その

ような試みは古くから行なわれている[V][F1][F2][M]. しかし．これらの仕事は．最近Ahlfors[A1][A2][A3]がそれを用いて高次元の双曲幾何学を展開しようとするまで忘れられていた。

ここでは　クリフォード多元環を用いることによって．一般次元の双曲空間のいくつかのモデルとその等長写像群に統一的な視点を与える。　さらに等長写像を共役分類する。これには　クリフォード群の共役不変関数が重要な役割を果たす。

§1. クリフォード多元環とクリフォード群の共役不変関数

$E = E^{n,p}$ を $n+p$ 次元の実ベクトル空間、q をその上の (n,p) 型の２次形式とする。

$$\mathcal{B} = \{ i_1, \cdots, i_n, i_\omega, \cdots, i_{\omega+p-1} \}$$

を（E，q）の正規直交基底とする。すなわち

$$v = v_1 i_1 + \cdots + v_n i_n + v_\omega i_\omega + \cdots + v_{\omega+p-1} i_{\omega+p-1} \in E$$

に対して

$$q(v) = -v_1^2 - \cdots - v_n^2 + v_\omega^2 + \cdots + v_{\omega+p-1}^2 .$$

（E．q）に付随した実クリフォード多元環をCまたは $C^{n,p}$ とかく。このとき $\mathcal{B}$ は C を生成し．次の関係式をみたす。

$$i_j^2 = -1 \quad (j = 1, \cdots, n)$$

$$i_j^2 = 1 \quad (j = \omega, \cdots, \omega+p-1)$$

$$i_j i_k = -i_k i_j \quad (j \neq k)$$

C の任意の元は

$$a = \sum a_I \cdot I \qquad (a_I \in \mathbb{R})$$

$$I = i_{j_1} \cdots i_{j_r} \qquad (j_1 < \cdots < j_r)$$

と一意的に表わされる。上の I に対して r を I の長さといい $l(I)$ とかく。a のノルムは

$$|a| = \left(\sum a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定義される。C の任意の部分集合 A に対して

$$A^{(k)} = \{ a = \sum a_I I \in A \mid l(I) \neq k \Rightarrow a_I = 0 \}$$

$$A_{ev} = \{ a = \sum a_I I \in A \mid l(I) : \text{odd} \Rightarrow a_I = 0 \}$$

$$A_{od} = \{ a = \sum a_I I \in A \mid l(I) : \text{even} \Rightarrow a_I = 0 \}$$

とおき、$a = \sum a_I I \in C$ に対して

$$a^{(k)} = \sum_{l(I) = k} a_I I$$

とおく。また

$$a' = \sum (-1)^{l(I)} a_I \cdot I$$

$$a^* = \sum (-1)^{\frac{l(I)(l(I)-1)}{2}} a_I I$$

$$a^- = \sum (-1)^{\frac{l(I)(l(I)+1)}{2}} a_I I$$

とすれば、$a \to a'$ は C の同型、$a \to a^*$ と $a \to a^-$ は C の逆同型であり、これらは互いに可換であって $a^- = a'^*$ となっている。

さて $C^{n,p}$ のクリフォード群 $\Gamma = \Gamma^{n,p}$ を次で定義する。

$$\Gamma = \{ a \in C \mid a \text{ は invertible かつ } a v a^{-1} \in E \ (\forall v \in E) \}$$

これは容易に確かめられるように C の乗法に関して群になる。Γ の元 a に対して定まる E の変換

$$\rho_a : E \longrightarrow E$$

$$\rho_a(v) = a v a'^{-1} \quad (v \in E)$$

は直交変換である。実際

$$\begin{aligned} q(\rho_a(v)) &= -(ava'^{-1})'(ava'^{-1}) \\ &= a'va^{-1}ava'^{-1} \\ &= v^2 \\ &= q(v). \end{aligned}$$

従って ρ は $\Gamma^{n,p}$ から直交群 $O(n,p)$ への準同型であるが、これについて次の完全列がなりたつ。

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \Gamma^{n,p} \xrightarrow{\ \rho\ } O(n,p) \longrightarrow 1$$

証明．$v \in E$, $q(v) \neq 0$ とすると E は

$$E = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^{\perp}$$

と直交部分空間の直和に分解される。任意の $u \in E$ は

$$u = tv + w \quad (t \in \mathbb{R},\ w \perp v)$$

と書かれる。このとき $wv + vw = 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} vuv'^{-1} &= v(tv + w)v'^{-1} \\ &= -tv + w \\ &\in E. \end{aligned}$$

よって $v \in \Gamma$ であり ρ_v は $\langle v\rangle^\perp$ に関する対称変換である。 Cartanの定理によれば、$O(n,p)$ はこのような対称変換によって生成されるから ρ は上への写像である。 次に、$a = \sum a_I I \in \mathrm{Ker}\,\rho$ としよう。 任意の $v \in E$ に対して $av = va'$ がなりたつから、特に $i_j \in \mathcal{B}$ に対しては、

$$a_I I i_j = a_I i_j I'$$

でなければならないが、 $I \neq 1$ のとき $i_j \in I$ となる i_j をとれば $I i_j = -i_j I$ だから $a_I = 0$、 すなわち $a \in \mathbb{R}$ でなければならない。 $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ のときは $\rho_a = \mathrm{id}$ となることは容易にわかる。 証明終.

これから Γ は E の可逆元で生成されることがわかる。すなわち $a \in \Gamma$ に対して

$$\rho_a = \rho_{v_1} \cdots \rho_{v_r} \quad (v_j \in E,\ v_j^2 \neq 0)$$
$$= \rho_{v_1 \cdots v_r}$$

とかけるが $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ だから $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ があって

$$a = t\, v_1 \cdots v_r$$

となる。

C の元 a のスピンノルム $N(a)$ は

$$N(a) = a^- a \in C$$

と定義される。 Γ の元が E の元の積でかけることを使

えば 次は容易に示される。

命題　$a \in \Gamma$ のとき $N(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ であり N は Γ から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への準同型

Γ の部分群 $Pin(n.p)$ と $Spin(n.p)$ を次のように定義する。

$$Pin(n.p) = \{ a \in \Gamma^{n.p} \mid N(a) = \pm 1 \},$$
$$Spin(n.p) = \{ a \in \Gamma^{n.p}_{ev} \mid N(a) = \pm 1 \}.$$

これらについて次の完全列がなりたつ。

$$1 \to \{\pm 1\} \to Pin(n.p) \xrightarrow{\rho} O(n.p) \to 1,$$
$$1 \to \{\pm 1\} \to Spin(n.p) \xrightarrow{\rho} SO(n.p) \to 1.$$

次に Γ による共役不変な C 上の関数について述べる。

補題　$a \in C$, $\alpha \in \Gamma$ ならば $(\alpha a \alpha^{-1})^{(k)} = \alpha a^{(k)} \alpha^{-1}$.

証明．まず $v \in E$, $g(v) \neq 0$ なる v に対して

$$v a^{(k)} v^{-1} \in C^{(k)}$$

を示す。$b = v a^{(k)} v^{-1}$ とおけば明らかに

$$b \in C^{(k-2)} \oplus C^{(k-1)} \oplus C^{(k)} \oplus C^{(k+1)} \oplus C^{(k+2)}$$

であるから

$$b = b^{(k-2)} + b^{(k-1)} + b^{(k)} + b^{(k+1)} + b^{(k+2)}$$

よって

$$b' = (-1)^k (b^{(k-2)} - b^{(k-1)} + b^{(k)} - b^{(k+1)} + b^{(k+2)})$$

$$b^- = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (- b^{(k-2)} + b^{(k-1)} + b^{(k)} - b^{(k+1)} - b^{(k+2)})$$

であるが、一方

$$b' = (v a^{(k)} v^{-1})'$$

$$= (-1)^k v a^{(k)} v^{-1}$$

$$= (-1)^k b$$

だから $b^{(k-1)} = b^{(k+1)} = 0$。 また

$$b^- = (v a^{(k)} v^{-1})^-$$

$$= N(v)^{-1} (v a^{(k)} v^-)^-$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} N(v)^{-1} v^- a^{(k)} v^-$$

$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} b$$

だから $b^{(k-2)} = b^{(k+1)} = b^{(k+2)} = 0$。 従って $b = b^{(k)} \in C^{(k)}$.

さて

$$v a v^{-1} = \sum_{k=0}^{n+p} v a^{(k)} v^{-1}$$

であるが、上に示したように $v a^{(k)} v^{-1} \in C^{(k)}$ だから

$$(v a v^{-1})^{(k)} = v a^{(k)} v^{-1}$$

である。 任意の $\alpha \in P$ に対しては E の元の積に表わしておいて帰納的にやればよい。証明終。

系　$a \in C^{n,p}$ のとき任意の $\alpha \in \Gamma^{n,p}$ に対して

$$(\alpha a \alpha^{-1})^{(0)} = a^{(0)}$$

$n+p$ が奇数のときは、さらに次もなりたつ。

$$(\alpha a \alpha^{-1})^{(n+p)} = a^{(n+p)}$$

定義　$k = 0, 1, \cdots, n+p$ に対して C 上の実数値関数 T_k を

$$T_k(a) = ((a^{(k)})^- a^{(k)})^{(0)} \qquad (a \in C)$$

で定義する。

定理　$a \in C$, $\alpha \in \Gamma$ に対して $T_k(\alpha a \alpha^{-1}) = T_k(a)$.

証明

$$\begin{aligned}
T_k(\alpha a \alpha^{-1}) &= (((\alpha a \alpha^{-1})^{(k)})^- (\alpha a \alpha^{-1})^{(k)})^{(0)} \\
&= ((\alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^- \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\
&= N(\alpha)^{-1} ((\alpha a^{(k)} \alpha^-)^- \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\
&= N(\alpha)^{-1} (\alpha (a^{(k)})^- \alpha^- \alpha a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\
&= (\alpha (a^{(k)})^- a^{(k)} \alpha^{-1})^{(0)} \\
&= \alpha T_k(a) \alpha^{-1} \\
&= T_k(a).
\end{aligned}$$

証明終。

最後に $O(n,p)$ の元 ξ に対して $\rho_a = \xi$ となる $a \in \Gamma$ をとれば、

$$T_k(\xi) = T_k(a) = T_k(-a)$$

と定義できることを注意しておこう。

§2. 双曲空間の3つのモデル

以下では $C^{n,0}$, $\Gamma^{n,0}$ 等を略して C^n, Γ^n 等とかく。

定義　C^n の元を成分とする 2×2 行列 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件をみたすとき，g を n 次のクリフォード行列と呼び，その全体を $\mathcal{C}^n$ とかく。

(C1)　$a, b, c, d \in \Gamma^n \cup \{0\}$

(C2)　$ab^*, cd^* \in E^n$.

(C3)　$ad^* - bc^* = 1$.

$\mathcal{C}^n$ は行列の積に関して群になるが，証明は容易ではない。ここではその証明は省略するが，次のことだけを注意しておく。$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n$ ならば

(C1$_{ev}$)　$a, d \in \Gamma^n_{ev} \cup \{0\}$ かつ $b, c \in \Gamma^n_{od} \cup \{0\}$

または　(C1$_{od}$)　$a, d \in \Gamma^n_{od} \cup \{0\}$ かつ $b, c \in \Gamma^n_{ev} \cup \{0\}$。

$\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$ を E^n の一点コンパクト化とする。$\mathcal{C}^n$ の $\hat{E}^n$ への作用を $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n$, $z \in E^n$ に対して

(1)　$$gz = (az+b)(cz+d)^{-1}$$

によって定義する。これは well defined で連続な作用だが、それを一々示すのはやめて、$z \longrightarrow gz$ が、どのような変換であるかを具体的に示すことにしよう。まず $g \in \mathcal{L}^n$ に対して、次のような分解がなりたつ。

$c = 0$ のとき　$g = \begin{pmatrix} 1 & ab^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a| & 0 \\ 0 & |a|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|^{-1}a & 0 \\ 0 & |a|^{-1}a' \end{pmatrix}$,

$c \neq 0$ のとき、$g = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & |c|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |c|^{-1}c & 0 \\ 0 & |c|^{-1}c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

これらはどちらも次の4つの型の変換の合成である。

1) $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = z + v \quad (v \in E^n)$　平行移動

2) $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} z = r^2 z \quad (r \in \mathbb{R})$　相似拡大（縮小）

3) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} z = a z a'^{-1} \quad (a \in \Gamma^n)$　回転

4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z = \dfrac{z}{|z|^2}$　単位球面に関する反転

従って g による変換は一般次元の Mëbius 変換と呼ばれるものである。また任意の Mëbius 変換が $\mathcal{L}^n$ の元 g によって (1) のように表わされることもわかる。

以下では g による $\hat{E}^n$ の変換を $[g]$ とかくことにしよう。作用の核は $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ だから $[g] = [-g]$ である。

I. 上半空間モデル

$$H^n = \{ z = z_1 i_1 + \cdots + z_n i_n \in E^n \mid z_n > 0 \}$$

とする。$\mathcal{L}^{n-1}$ の元 g を $\mathcal{L}^n$ の元と考えれば、

$$z = v + z_n i_n \quad (v \in E^{n-1},\ z_n \in \mathbb{R})$$

に対して

(2) $$gz = |cz+d|^{-2}\{(|z|^2 ac^- + bd^- + avd^- - bvc^-) + z_n i_n\}$$

となるから g は $\hat{E}^n$ および H^n を不変にする。このとき $[g]|_{H^n}$ を $[g]|_{\hat{E}^n}$ の Poincaré 拡張という。

H^n 上の Riemann 計量を

$$ds = \frac{|dz|}{z_n}$$

で定義すれば よく知られているように H^n は双曲空間になる。このとき $\mathcal{V}^{n-1}$ が等長写像によって H^n に作用することは 次のようにしてわかる。 $g \in \mathcal{V}^{n-1}$, $w = gz$ とすると (2) より

$$w_n = |cz+d|^{-2} z_n .$$

一方

$$w(cz+d) = az+b .$$

$$dw(cz+d) + wc\,dz = a\,dz$$

$$dw = \{a - (az+b)(cz+d)^{-1}c\}(cz+d)^{-1}$$

$$= c^{*-1}(cz+d)^{-1}c \cdot dz\,(cz+d)^{-1}$$

$$|dw| = |cz+d|^{-2}\cdot|dz|$$

従って

$$\frac{|dw|}{w_n} = \frac{|dz|}{z_n} .$$

$\mathcal{V}^2$ と $PSL_2(\mathbb{C})$ との関係を与えておこう。 $v \in E^3$ に対して.

//

$$\nu(v) = (1-i_1)(1+i_2)(1-i_3)\, v\, (1+i_3)^{-1}(1-i_2)^{-1}(1+i_1)^{-1}$$

とおけば，ν は H^3 を

$$\{ z_0 + z_1 i_1 + z_2 i_2 \in C^2 \mid z_2 > 0 \}$$

の上に，1対1に写す。

$$g = \begin{pmatrix} a_0 + a_{12} i_1 i_2 & b_1 i_1 + b_2 i_2 \\ c_1 i_1 + c_2 i_2 & d_0 + d_{12} i_1 i_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2{}_{ev}$$

に対して

$$\nu g \nu^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 + a_{12} i & b_1 + b_2 i \\ -c_1 + c_2 i & d_0 - d_{12} i \end{pmatrix} \in SL_2(C)$$

が対応する。

II 単位球モデル

$$B^n = \{ z \in E^n \mid |z| < 1 \}$$

に Riemann 計量

$$ds = \frac{2\,|dz|}{1 - |z|^2}$$

を入れると，B^n は次の行列による Möbius 変換により H^n と等長同相になる。

$$\phi_n = \begin{pmatrix} 1 & -i_n \\ -i_n & 1 \end{pmatrix} : H^n \longrightarrow B^n$$

$\mathcal{C}^{n-1}$ には

$$\mathcal{C}^{n\#} = \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ f' & e' \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^n \right\}$$

が対応する。この $\mathcal{C}^{n\#}$ が等長変換によって B^n に作用する。

Ⅲ　双曲面モデル

$$Q^n_+ = \{ z = z_1 i_1 + \cdots + z_n i_n + z_w i_w \in E^{n,1} \mid q(z) = 1,\ z_w > 0 \}$$

とおき，Q^n_+ 上の Riemann 計量を

$$ds^2 = dz\, dz^- $$
$$= dz_1^2 + \cdots + dz_n^2 - dz_w^2$$

で定義する。次の行列による Möbius 変換で B^n が Q^n_+ に等長に写像される。

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & i_w \\ -i_w & 1 \end{pmatrix} : B^n \longrightarrow Q^n_+ .$$

$\mathcal{E}^{n\#}$ に対応するのは，$Pin(n,1)$ の指数２の部分群

$$Pin^+(n,1) = \{ a \in \Gamma^{n,1} \mid N(a) = 1 \}$$

である。$Pin^+(n,1)$ は ρ によって $E^{n,1}$ に作用するが，これは実は Q^n_+ を不変にし，Q^n_+ 上に等長写像として作用している。$O(n,1)$ の元で Q^n_+ を集合として不変にするもの全体は $O(n,1)$ の指数２の部分群をつくる。これを $O^+(n,1)$ とかけば，これは ρ による $Pin^+(n,1)$ の像であり，Q^n_+ の等長写像群である。

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow Pin^+(n,1) \xrightarrow{\rho} O^+(n,1) \to 1$$

§3 双曲空間の等長写像の標準型

定義 $g \in \mathcal{C}^{n\#}$ は

i) B^n に不動点をもつとき elliptic という。

ii) B^n に不動点をもたず、∂B^n に不動点を1つだけもつとき parabolic という。

iii) B^n に不動点をもたず、∂B^n に不動点を2つもつとき hyperbolic という。

$\mathcal{C}^n$ や $Pin^+(n,1)$ の元に対しても同様に定義する。

定理 ξ を $O^+(n,1)$ の元とすると ξ は $O^+(n,1)$ 内で次のただ一つの標準型と共役になる。

i) ξ が elliptic のとき

$$\rho_{i_1 \cdots i_r} (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \cdots (\cos\theta_s + \sin\theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s})$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_s > 0 \right)$$

ii) ξ が parabolic のとき

$$\rho_{i_1 \cdots i_r} (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \cdots (\cos\theta_s + \sin\theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s})(1 + i_{r+2s+1}(i_{r+2s+2} + i_w))$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_s > 0 \right)$$

iii) ξ が hyperbolic のとき

$$\rho_{i_1 \cdots i_r} (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \cdots (\cos\theta_{s-1} + \sin\theta_{s-1} i_{r+2s-3} i_{r+2s-2})(\cosh\theta_s + \sinh\theta_s i_{r+2s-1} i_w)$$

$$\left(\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_{s-1} > 0, \quad \theta_s > 0 \right)$$

注意　定理は双曲面モデルの等長写像に関して述べられているが、これを上半空間モデルあるいは単位球モデルに翻訳するのは容易にできる。

証明の方針.

ξ が実際に標準型の一つと共役になることは構成的に示す。まず $p_\alpha = \xi$ となる $\alpha \in Pin^+(n,1)$ をとる。例えば α が elliptic のときは次のようにする。$\psi^{-1}\alpha\psi = g \in \mathcal{C}^{n\#}$ は elliptic だから不動点 $v \in B^n$ をもつ。

$$h = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\begin{pmatrix} 1 & -v \\ v & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^{n\#}$$

とすれば $hv = 0$. よって $hgh^{-1}0 = 0$.

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} \quad a \in Pin(n).$$

$p_a \in O(n)$ に対しては固有値の議論によって $q \in O(n)$ があって

$$q\, p_a\, q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & R_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & R_s & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad R_j = \begin{pmatrix} \cos 2\theta_j & -\sin 2\theta_j \\ \sin 2\theta_j & \cos 2\theta_j \end{pmatrix}$$

$$= p_{i_1 \cdots i_r (\cos\theta_1 + \sin\theta_1 i_{r+1} i_{r+2}) \cdots (\cos\theta_s + \sin\theta_s i_{r+2s-1} i_{r+2s})}$$

α が parabolic または hyperbolic のときは上半空間モデルで同様の議論をすればよい。

さて これらの標準型がどの2つも互いに $O^+(n,1)$ 内で共役にならないことは共役不変関数 T_k を用いて証明

される。まず不動点の個数は共役不変量だから、異なる型の等長写像どうしは共役にはならない。elliptic の場合に T_k を計算してみると、まず

$$r = \min\{k \mid T_k \neq 0\}$$

$$r+2s = \max\{k \mid T_k \neq 0\}$$

がわかる。さらに $\sin^2\theta_1, \cdots, \sin^2\theta_s$ の j 番目の基本対称式を P_j とすると、

$$T_{r+2k} = \sum_{j=k}^{s} (-1)^{j-k} {}_jC_k P_j \qquad (k=0, \cdots, s)$$

となるが、これは P_j について解いて

$$P_j = \sum_{k=j}^{s} {}_kC_j T_{r+2k}.$$

従って T_k から $\theta_1, \cdots, \theta_s$ も決まってしまう。

References

[A1] Ahlfors, L.V. Möbius Transformations and Clifford Numbers, Differential Geometry and Complex Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[A2] — Old and New in Möbius Groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Vol. 9, 1984.

[A3] — On the fixed points of Möbius transformations in $\mathbb{R}^n$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, Vol. 10, 1984.

[F1] Fueter, R. Sur Les Groupes Improprement Discontinus, Comptes Rendus Acad. des Sci. Paris 182, 432-434, 1926.

[F2] — Über Automorphe Funktionen in Bezug auf Gruppen, Die in Der Ebene Uneigentlich Diskontinuierlich Sind, Crelle Journal 157, 1927.

[M] Maass, H. Automorphe Funktionen von Mehreren Veränderlichen und Dirichletsche Reihen, Abh. Math. Sem. Univ Hamburg 16, 53-104, 1949.

[V] Vahlen, K. Th. Über Bewegungen und Complexe Zahlen, Math. Annalen, 55, 585-593, 1902

[W] Wada, M. Conjugacy Invariants and Normal Forms of Isometries of Hyperbolic Space, preprint.